TINJAUAN TERHADAP SIKLOID TERBALIK TERKAIT MASALAH *BRACHISTOCHRONE*

Mohammad Lutfi

Email: lutfi_plhld@yahoo.co.id
Sekolah Tinggi Teknologi Minyak dan Gas Bumi Balikpapan

Abstrak: Penelitian ini merupakan studi pustaka dengan pusat perhatian pada grafik dan cara mendapatkan persamaan $x = \frac{1}{2} y_1(\theta + \sin\theta),\ y = \frac{1}{2} y_1(1 - \cos\theta).$ Persamaan tersebut dikemukakan oleh Soedojo dalam membahas masalah *brachistochrone*. Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh informasi mengenai grafik persamaan tersebut dalam kaitannya dengan pengertian sikloid dan penggunaan sikloid terbalik terkait masalah *brachistochrone*. Informasi lain yang ingin didapatkan adalah dampak negatif dari interpretasi terhadap $y_1 - y$ sebagai ketinggian dan cara mendapatkan persamaan tersebut. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah menganalisis dan memberi interpretasi konsep-konsep matematika dan mekanika yang berkaitan dengan penelitian ini. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa grafik persamaan tersebut di atas tidak sesuai dengan pengertian sikloid dan masalah *brachistochrone*. Persamaan yang sesuai adalah $x = \frac{1}{2} y_1(\theta - \sin\theta),\ y = \frac{1}{2} y_1(1 - \cos\theta).$ Hasil lain yang didapatkan adalah keberadaan persamaan tersebut, berkaitan dengan interpretasi terhadap $y_1 - y$ sebagai ketinggian yang merupakan suatu kekeliuran dan cara mendapatkannya adalah suatu kelemahan.

Kata kunci: Sikloid Terbalik dan Masalah *Brachistochrone*.

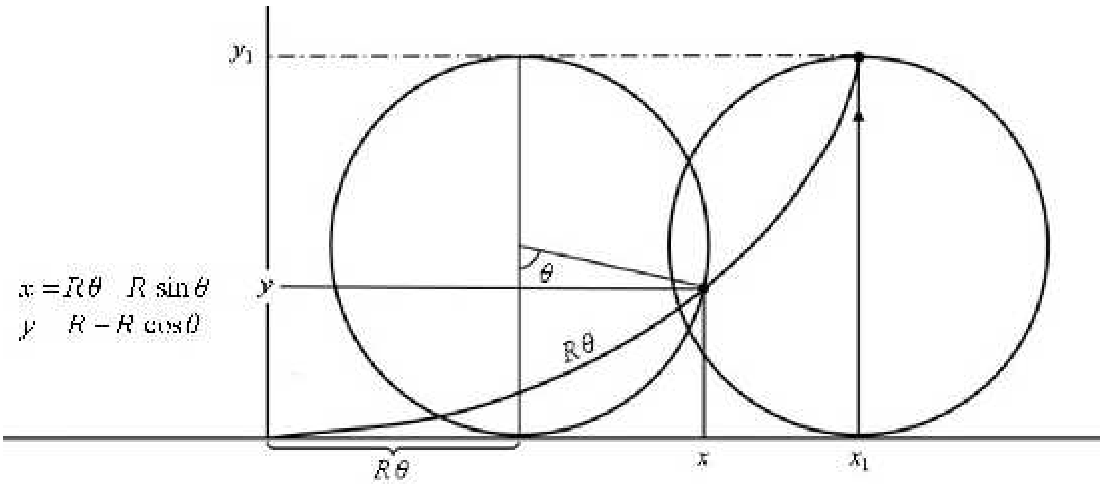
Absract: This research is a literature study with focus on the graph and the way to get the equations of $x = \frac{1}{2} y_1(\theta + \sin\theta),\ y = \frac{1}{2} y_1(1 - \cos\theta).$ The equations was described by Soedojo to explain about brachistochrone problem. The aims of this research is to get information about the graph of equations related to the definition of cycloid and application of upside cycloid in terms of brachistochrone problem. Another information is negative impact of interpretation to $y_1 - y$ as a height and the way to get the equations. The method is used in this research is analysing and giving interpretation about mathematical and mechanical concept related to this research. The result revealed that the graph of equations above not suitable to the definition of cycloid and brachistochrone problem. The appropriate equations is $x = \frac{1}{2} y_1(\theta - \sin\theta),$ $y = \frac{1}{2} y_1(1 - \cos\theta).$ Another result is the existence of equations related to interpretation of $y_1 - y$ as a height is a mistake and the way to get the equations is a weakness.

Key words: Upside Cycloid and Brachistochrone Problem.

Sikloid banyak diterapkan dalam mekanika, terutama yang berkaitan dengan masalah *brachistochrone*. Pada prinsipnya masalah *brachistochrone* adalah membentuk suatu model matematika yang berupa fungsional

$I = \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} F(y,y')dx$, … (1) dengan $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ dan

$F(y,y') = \dfrac{\frac{ds}{dx}\text{(turunan pertama panjang kurva)}}{V\text{(kecepatan gerak benda)}}$. Selanjutnya, mencari ekstremal fungsional tersebut dengan menggunakan persamaan Euler $F - y'Fy' = C$ … (2). Soedojo (1995: 412-414) menerapkan rumus kecepatan benda jatuh bebas $v = \sqrt{2g(y_1 - y)}$ …(3) sehingga mendapatkan fungsional masalah *brachistochrone* $I = \int_{x_1,y_1}^{0} \left\{\dfrac{1+y'^2}{2g(y_1 - y)}\right\}^{1/2} dx$ … (4) dan menerapkan persamaan (2), yang menghasilkan $\dfrac{dy}{dx} = \left\{\dfrac{b+y}{a-y}\right\}^{1/2}$ … (5) dengan $a = y_1$, $b = (2gC^2)^{-1} - y_1$ dan $y(x_1) = y_1$, $y(x_0) = 0$. Penyelesaian persamaan (5) adalah $x = \frac{1}{2}y_1(\theta + \sin\theta)$, $y = \frac{1}{2}y_1(1 - \cos\theta)$ … (6) yang menurut Soedojo merupakan persamaan lintasan berupa sikloid terkait masalah *brachistochrone* dan digambarkan seperti berikut:



Gambar 1. Grafik persamaan (6)

Terlihat garis lengkung pada gambar 1 yang seolah-olah keberadaannya sebagai akibat menggelindingnya lingkaran pada sumbu x, sehingga garis lengkung itu dipandang sebagai suatu sikloid. Tetapi jika dilakukan suatu peragaan lingkaran seperti pada gambar 1 digelindingkan pada sumbu x, tidaklah terbentuk suatu garis lengkung. Dengan demikian garis lengkung pada Gambar 1 tersebut bukanlah satu sikloid.

Keberadaan persamaan (6) merupakan implikasi dari interpretasi $y_1 - y$ sebagai ketinggian. Hal ini tampak pada persamaan (4).

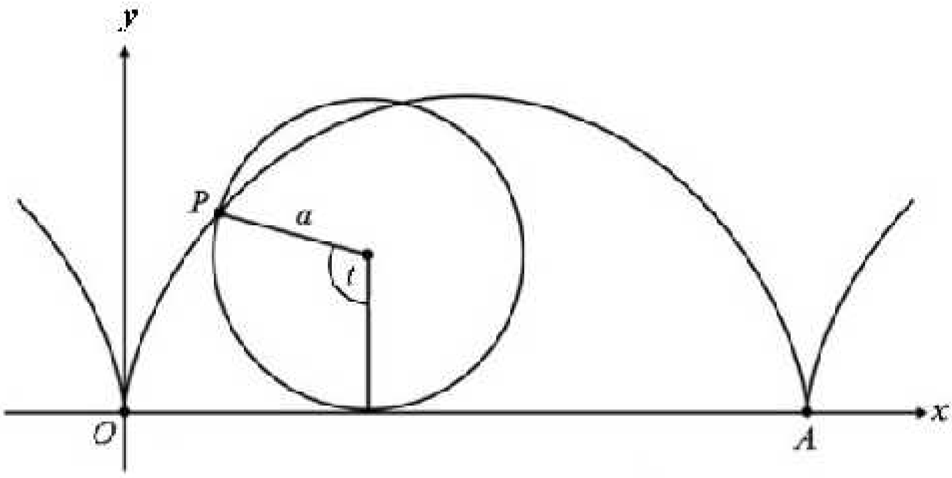
Cara Soedojo mendapatkan persamaan (6) adalah langsung menetapkan jawaban $y = \frac{a-b}{2} - \frac{a+b}{2}\cos\theta$, … (7) dengan a dan b sudah tertentu nilainya. Penetapan tersebut, tidaklah menghasilkan jawaban salah, namun menimbulkan kesan bahwa telah diketahui sebelumnya jawaban persamaan (5) adalah persamaan (6). Sedangkan penulis memahami bahwa:

1. Sikloid mempunyai persamaan
   $x = \frac{1}{2} y_1 (\theta - \sin\theta)$, $y = \frac{1}{2} y_1 (1 - \cos\theta)$, … (8)
   sesuai yang tercantum di dalam buku-buku kalkulus dan kamus matematika. Besaran $\frac{y_1}{2}$ menunjukkan panjang jari-jari lingkaran yang membentuk sikloid tersebut.
2. Soal masalah *brachistochrone* hanya terselesaikan dengan menggunakan sikloid terbalik.
3. Subtitusi yang sesuai untuk memperoleh jawaban dalam bentuk persamaan parameter dari suatu persamaan differensial adalah jawaban dalam variabel tak bebas dan variabel bebas keduanya dicari melalui suatu penjabaran.

Didorong oleh pemahaman tersebut, penulis menilai bahwa cuplikan tulisan Soedojo tersebut di atas merupakan suatu kekeliuran dan/atau kelemahan. Oleh karena itu timbul minat penulis untuk melakukan suatu penelitian yang berjudul “Tinjauan Terhadap Sikloid Terbalik Terkait Masalah *Brachistochrone*”.

KAJIAN TEORI

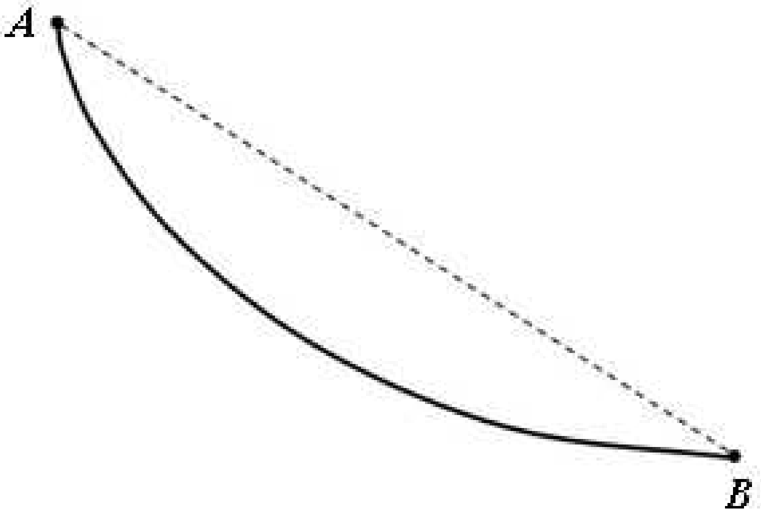
Pengertian sikloid dapat dilihat dalam kamus matematika dan buku-buku kalkulus. Menurut kamus matematika oleh Clapham dan Nicholson (2009: 204), *Cycloid. The curve traced out by a point on the circumference of a circle that rolls without slipping along a straight line. With suitable axes, the cycloid has parametric equations* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(t \in \Re)$, … (9) *where a is a constant* (*equal to the radius of the rolling circle*).



Gambar 2. *Cycloid*

Sedangkan menurut Purcell, Varberg dan Rigdon, alih bahasa Gressando (2004: 173), bahwa ”Sikloid merupakan ”kurva yang menurun paling cepat” (”*curve of fastest descent*”).

Jika sebuah partikel, hanya dikenai oleh gaya gravitasi, diluncurkan pada suatu kurva dari titik *A* ke titik yang lebih rendah di *B* tidak pada suatu jalur yang tegak, maka partikel tersebut akan menyelesaikan perjalanannya dalam waktu tersingkat ketika lintasan yang dilewati berupa kurva sikloid terbalik” seperti Gambar 3.



Gambar 3. Sikloid terbalik

Menurut Soedojo (1995: 412-413) bahwa ”masalah *brachistochrone* yakni yang bersangkutan dengan selang waktu minimum bagi suatu titik materi yang meluncur sepanjang liku $y = f(x)$ dari ketinggian y_1 di atas permukaan bumi”.

Menurut Elsgolc alih bahasa Agung (1975: 2) bahwa ”masalah *brachistochrone* ialah soal menentukan suatu kurva yang menghubungkan dua buah titik yang diketahui *A* dan *B* yang tidak terletak pada suatu garis vertikal, sehingga suatu partikel yang berat meluncur (ke bawah) sepanjang kurva ini dari *A* ke *B* dalam waktu sesingkat mungkin”.

Selanjutnya, Elsgolc (1975: 21-22) menyelesaikan soal masalah *brachistochrone*, sebagai berikut:

Diambil titik *A* sebagai titik pangkal dari sistem koordinat, sumbu *x* horizontal dan sumbu *y* vertikal dengan arah ke bawah. Kecepatan partikel itu adalah $v = ds/dt = \sqrt{2gy}$, dengan demikian waktu dalam mana partikel ini mencapai $A(x_1, y_1)$ dari $B(0,0)$

$$t(y(x)) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{\sqrt{y}}}\,dx, \quad \ldots(10) \quad y(0) = 0,\ y(x_1) = y_1 .$$

Dengan menggunakan persamaan (2) dan subtitusi $y' = \cot t$, diperoleh persamaan

$\frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{1}{\sqrt{y}}(1+y'^2) = C$ … (11) yang penyelesaiannya adalah persamaan (8), dengan $^{-} = 2t$ dan $C = y_1$.

METODE PENELITIAN

Pada prinsipnya, penelitian ini dilakukan dengan cara menganalisis dan memberi interpretasi konsep-konsep matematika dan mekanika yang berkaitan dengan penelitian ini. Secara operasional, ada tiga tahap yang ditempuh pada penelitian ini, yaitu:

1. Tahap pertama, mengumpulkan dan mempelajari konsep-konsep matematika dan mekanika dari buku-buku seperti pada daftar pustaka.
2. Tahap kedua, menentukan bahwa grafik persamaan (6) dan (8) dapat atau tidak dapat terbentuk dengan cara mengamati berulang-ulang suatu tempat berupa titik pada suatu roda yang menggelinding disepanjang jalan yang lurus. Pengamatan yang dimaksud dikaitkan dengan pengertian sikloid, kemudian digambarkan secara geometri.
3. Tahap ketiga, memeriksa bahwa konsep-konsep matematika dan mekanika tersebut diterapkan dengan benar pada kegiatan tahap kedua.

HASIL DAN PEMBAHASAN

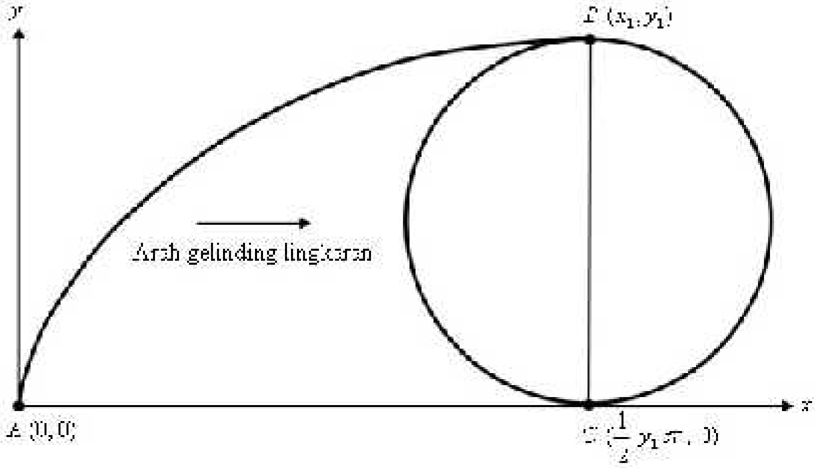
Tersebut dalam uraian sebelumnya bahwa grafik persamaan (6) dan (8) berupa sikloid terkait masalah *brachistochrone*. Benar atau tidak benar hal tersebut, dilakukan penyelidikan dengan mengacu pada metode penelitian seperti berikut:

1. Grafik persamaan (6)

Penulis meyakini bahwa grafik persamaan (6) tidak berupa sikloid. Hal tersebut dapat diperlihatkan secara geometri sebagai berikut: jika lingkaran digelindingkan tanpa tergelincir di sepanjang sumbu *x*, grafik persamaan (6) seperti gambar 1 tidak terbentuk. Hal tersebut berarti, keberadaan grafik persamaan (6) tidak sesuai dengan pengertian sikloid dan tidak ada kaitannya dengan masalah *brachistochrone*. Jadi, jelaslah bahwa grafik persamaan (6) tidak berupa sikloid. Perlu dijelaskan bahwa di dalam membicarakan masalah *brachistochrone*, interpretasi terhadap $y_1 - y$ sebagai ketinggian menyebabkan terbentuk persamaan (6) dan memberi makna suatu partikel yang bergerak dari atas ke bawah tidak pernah mencapai permukaan bumi. Hal ini bertentangan dengan pernyataan Soedojo sebelumnya yang menjelaskan bahwa y_1 merupakan ketinggian.

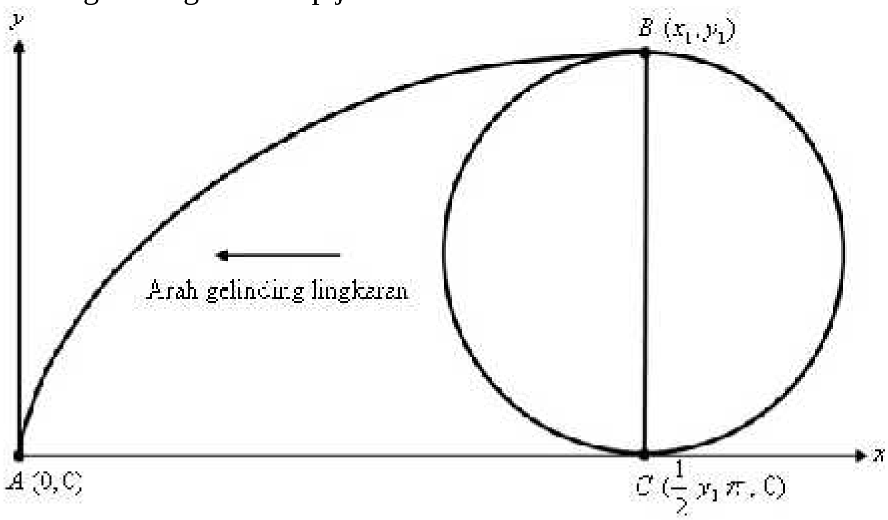
2. Grafik persamaan (8)

Penulis juga meyakini, grafik persamaan (8) berupa sikloid. Kebenaran hal tersebut dapat diperlihatkan secara geometri sebagai berikut: Jika lingkaran digelindingkan tanpa tergelincir di sepanjang sumbu *x*, grafik persamaan (8) terbentuk seperti pada gambar 4. Proses terbentuknya grafik tersebut, sesuai dengan pengertian sikloid. Tetapi perlu diperhatikan bahwa jika lingkaran digelindingkan tanpa tergelincir di sepanjang sumbu *x* positif, bergerak maju, berputar searah putaran jarum jam, maka terbentuk sikloid. Hal tersebut menunjukkan, partikel bergerak dari bawah di titik $A(0, 0)$ ke atas di titik $B(x_1, y_1)$ Hal ini bertentangan dengan konsep jatuh.



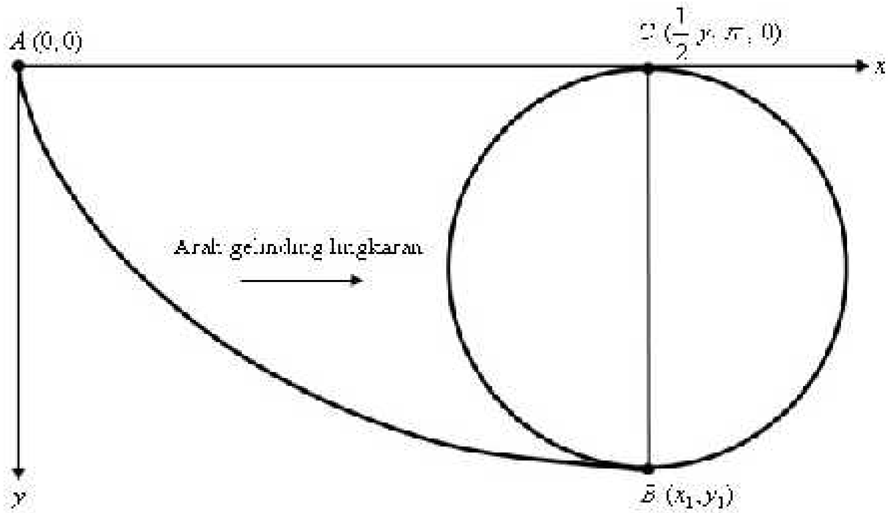
Gambar 4. Sikloid terbentuk dari titik $A(0, 0)$ ke titik $B(x_1, y_1)$

Sebaliknya, jika lingkaran digelindingkan tanpa tergelincir di sepanjang sumbu *x*, bergerak mundur dari titik *C* ke titik pangkal, berputar berlawanan dengan arah putaran jarum jam, terbentuk pula sikloid seperti pada gambar 5. Hal tersebut menunjukkan, partikel bergerak dari atas di titik $B(x_1, y_1)$ ke bawah di titik $A(0,0)$, tetapi melalui suatu kurva konkaf; bertentangan dengan konsep jatuh.



Gambar 5. Sikloid terbentuk dari titik $B(x_1, y_1)$ ke titik $A(0, 0)$

Selanjutnya, jika lingkaran digelindingkan tanpa tergelincir di sepanjang sumbu *x* positif, bergerak maju, berputar berlawanan arah putaran jarum jam sikloid terbalik terbentuk seperti gambar 6. Hal ini sesuai dengan gambar 3 dan cara Elsgolc dalam menyelesaikan masalah *brachistochrone*; mengambil sumbu *y* vertikal dengan arah ke bawah. Dengan demikian, hal tersebut sesuai dengan pengertian sikloid dan konsep jatuh.



Gambar 6. Sikloid terbalik terbentuk dari titik $A(0, 0)$ ke titik $B(x_1, y_1)$

Persamaan sikloid terbalik sama dengan persamaan (8). Hal ini didasarkan pada cara Elsgolc yang telah diuraikan sebelumnya. Perlu dijelaskan, pengambilan sumbu *y* vertikal dengan arah ke bawah akan diperoleh sikloid terbalik.

Menentukan jawaban persamaan (5) dalam bentuk persamaan Cartesius sangat rumit. Oleh karena itu digunakan persamaan parameter yang lebih sederhana dan mudah diperoleh. Kesulitannya hanya terletak pada pengambilan subtitusi yang sesuai supaya persamaan (5) terselesaikan. Kesulitan tersebut disebabkan jawaban dalam bentuk persamaan parameter dari suatu persamaan differensial tidak tunggal misalnya, jika diambil subtitusi

$y = \frac{a -}{\text{®}} - b$, maka jawaban persamaan .. (5) adalah

$$x = \frac{y_1}{2}\left\{\arccos\left(\frac{\text{®} - 2\bar{}}{\text{®}}\right) + \frac{2}{\text{®}}\sqrt{\bar{}(\text{®} - \bar{})}\right\},\; y = \frac{y_1 -}{\text{®}} \;\ldots\; (12)$$

Mungkin karena kesulitan tersebut, sehingga Soedojo menyelesaikan persamaan (5) dengan cara mengambil subtitusi yang merupakan jawaban akhir dalam *y*. pengambilan atau penetapan persamaan (7) memang sangat memudahkan untuk menyelesaikan persamaan (5), hanya mencari jawaban dalam *x*, kemudian diberlakukan syarat batas yang akhirnya diperoleh persamaan (6). Tetapi cara tersebut menimbulkan kesan, telah diketahui sebelumnya bahwa jawaban persamaan (5) adalah persamaan (6).

Dengan demikian penulis menilai bahwa cara Soedojo tersebut merupakan suatu kelemahan. Hal yang baik dilakukan untuk menghidari kesan tersebut adalah mengambil subtitusi $\frac{dy}{dx} = \tan t$. Subtitusi tersebut mengharuskan jawaban dalam *x* dan *y* keduanya dicari melalui suatu penjabaran.

KESIMPULAN

1. Jika dilakukan suatu peragaan lingkaran seperti gambar 1 digelindingkan sepanjang sumbu x tidak menyebabkan terbentuknya garis lengkung seperti pada gambar 1. Dengan demikian garis lengkung pada gambar 1 tersebut bukanlah suatu sikloid.

2. Pernyataan bahwa grafik persamaan (6) berupa sikloid dan interpretasi terhadap $y_1 - y$ sebagai ketinggian di dalam membicarakan masalah *brachistochrone*, merupakan suatu kekeliuran. Persamaan yang grafiknya berupa sikloid terkait masalah *brachistochrone* berturut-turut adalah persamaan (8) dan sikloid terbalik.
3. Cara menyelesaikan persamaan (5) dengan menetapkan subtitusi persamaan (7) sebagai jawaban akhir dalam y, memberikan jawaban yang benar, namun dipandang sebagai suatu kelemahan.

SARAN

1. Seyogyanya dalam mengajarkan sikloid sebaiknya disertai peragaan dan menulis mengenai sikloid, ada baiknya diperhatikan peragaan terbentuknya suatu sikloid.
2. Seyogyanya dalam menyelesaikan permasalahan fisika memperhatikan konsep matematika dengan seksama dan teliti.
3. Seyogyanya buku Soedojo Asas-Asas Matematika, Fisika, dan Teknik (1995) khususnya menyangkut sikloid atau masalah *brachistochrone* dilakukan revisi.

DAFTAR PUSTAKA

Clapham, Chirstopher & Nicholson, James. 2009. *Concise Dictionary of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Elsgolc, L. E. Diterjemahkan oleh Agung, N. 1975. *Calculus dari Variasi-variasi*. Ujung Pandang: FKIE IKIP.

Purcell, I. Edwin., Varberg, Dale & Rigdon, Steven E. 2004. Alih Bahasa oleh Julian Gressando. *Kalkulus*. Jilid 2. Edisi ke-8. Jakarta: Erlangga.

Soedojo, Peter. 1995 *Asas-Asas Matematika, Fisika, dan Teknik*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press.